প্রশ্ন (Question) 1

যদি α এবং β সমীকরণ $x^2 - x + 1 = 0$ এর দুটি মূল হয়, তবে α^{2009} এবং β^{2009} মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণটি নিচের কোনটি?

If α and β are the roots of the equation $x^2 - x + 1 = 0$, then the quadratic equation whose roots are α^{2009} and β^{2009} is:

A) $x^2 + x + 1 = 0$

B) $x^2 - x + 1 = 0$

C) $x^2 - 2x + 1 = 0$

D) $x^2 + 2x + 1 = 0$

উত্তর: B) $x^2 - x + 1 = 0$

সমাধান (Solution)

সমীকরণ $x^2 - x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় হলো:

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূল $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ এবং $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$। অতএব, মূলদ্বয়কে লেখা যায়:

$$\alpha = -\omega^2 \quad \text{এবং} \quad \beta = -\omega$$

এখন, এদের 2009 তম ঘাত নির্ণয় করি:

$$\alpha^{2009} = (-\omega^2)^{2009} = (-1)^{2009}\omega^{4018} = -\omega^{4018}$$

যেহেতু $4018 = 3 \times 1339 + 1$, সেহেতু $\omega^{4018} = \omega^1 = \omega$।

$$\Rightarrow \alpha^{2009} = -\omega = \beta$$

আবার,

$$\beta^{2009} = (-\omega)^{2009} = (-1)^{2009}\omega^{2009} = -\omega^{2009}$$

যেহেতু $2009 = 3 \times 669 + 2$, সেহেতু $\omega^{2009} = \omega^2$।

$$\Rightarrow \beta^{2009} = -\omega^2 = \alpha$$

দেখা যাচ্ছে যে, নতুন মূলদ্বয় যথাক্রমে প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের সাথে হুবহু মিলে যায়। অতএব, নির্ণেয় সমীকরণটি হবে $x^2 - x + 1 = 0$।

প্রশ্ন (Question) 2

যদি $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$ হয়, তবে $(x^{101} + i^{101})^{124} = x^n$ সমীকরণটি সিদ্ধ করার জন্য n এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক মান কোনটি?

If $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$, then what is the least positive integral value of n for which $(x^{101} + i^{101})^{124} = x^n$?

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

উত্তর: B) 4

সমাধান (Solution)

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ করে পাই:

$$x = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = e^{-i\pi/6}$$

এখন,

$$x^{101} = e^{-i101\pi/6}$$

যেহেতু $101\pi/6 = 16\pi + 5\pi/6$, তাই:

$$x^{101} = e^{-i5\pi/6} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

আমরা জানি, $i^{101} = i^{4\times25+1} = i$। তাহলে:

$$x^{101} + i^{101} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

এটি পোলার আকারে $e^{i5\pi/6}$।

এখন ঘাত 124 প্রয়োগ করে পাই:

$$(x^{101} + i^{101})^{124} = (e^{i5\pi/6})^{124} = e^{i(620\pi/6)} = e^{i310\pi/3}$$

যেহেতু $\frac{310\pi}{3} = 102\pi + \frac{4\pi}{3}$, সেহেতু:

$$e^{i310\pi/3} = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3}$$

আমরা চাই:

$$x^n = e^{-in\pi/6} = e^{-i2\pi/3}$$
$$\Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$
$$\Rightarrow n = 4 \pmod{12}$$

অতএব, n এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক মান হলো 4।

প্রশ্ন (Question) 3

যদি α, β, γ তিনটি জটিল সংখ্যা এমন হয় যে তারা একক বৃত্ত $|z| = 1$ এর উপর অবস্থিত এবং $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma$ শর্তটি সিদ্ধ করে, তবে $\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\bar{\alpha}$ এর মান কত?

If α, β, γ are three complex numbers lying on the unit circle $|z| = 1$ such that $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma$, then the value of $\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\bar{\alpha}$ is:

A) 0

B) 1

C) -1

D) 2

উত্তর: B) 1

সমাধান (Solution)

যেহেতু α, β, γ জটিল সংখ্যা তিনটি একক বৃত্তে অবস্থিত, তাই আমরা পাই:

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

এখন, নির্ণেয় রাশিটি হলো:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\bar{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\gamma + \alpha + \beta}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}\end{aligned}$$

দেওয়া আছে, $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma$। সুতরাং:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\bar{\alpha} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

প্রশ্ন (Question) 4

দুটি বাস্তব সংখ্যা a ও b (যেখানে $0 < a, b < 1$) এমনভাবে সম্পর্কিত যে $Z_1 = a + i$, $Z_2 = 1 + bi$ এবং $Z_3 = 0$ আর্গন্ড চিত্রে একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু নির্দেশ করে। a এবং b এর মান কত?

Two real numbers a and b lying between 0 and 1 are such that $Z_1 = a+i$, $Z_2 = 1+bi$, and $Z_3 = 0$ form an equilateral triangle in the Argand plane. What are the values of a and b?

A) $a = b = 2 - \sqrt{3}$

B) $a = b = 2 + \sqrt{3}$

C) $a = b = 4 - \sqrt{3}$

D) $a = 2 - \sqrt{3}, b = 2 + \sqrt{3}$

উত্তর: A) $a = b = 2 - \sqrt{3}$

সমাধান (Solution)

যদি জটিল সমতলে 0, Z_1, এবং Z_2 একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে, তবে জটিল সমতার বিশেষ ধর্ম থেকে আমরা পাই:

$$Z_1^2 + Z_2^2 - Z_1 Z_2 = 0$$

প্রদত্ত মান বসিয়ে পাই:

$$(a+i)^2 + (1+bi)^2 = (a+i)(1+bi)$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1 + 2ai) + (1 - b^2 + 2bi) = (a-b) + i(1+ab)$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2) + i(2a+2b) = (a-b) + i(1+ab)$$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:

- বাস্তব অংশ হতে: $a^2 - b^2 = a - b \Rightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$
- কাল্পনিক অংশ হতে: $2a + 2b = 1 + ab$

যদি $a \neq b$ হয়, তবে $a + b = 1$। কাল্পনিক অংশের সমীকরণে বসালে পাই:

$$2(1) = 1 + a(1-a) \Rightarrow 2 = 1 + a - a^2 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$$

যার বাস্তব কোনো সমাধান নেই। সুতরাং, $a = b$ হতে হবে।

এবার কাল্পনিক অংশের সমীকরণে $a = b$ বসিয়ে পাই:

$$4a = 1 + a^2 \Rightarrow a^2 - 4a + 1 = 0$$

দ্বিঘাত সমীকরণের সূত্র প্রয়োগ করে পাই:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

যেহেতু শর্ত দেওয়া আছে $0 < a < 1$, এবং $2 + \sqrt{3} > 1$, সেহেতু গ্রহণযোগ্য মানটি হলো:

$$a = b = 2 - \sqrt{3} \quad \text{(যা } 0 \text{ ও } 1 \text{ এর মধ্যবর্তী)}$$

প্রশ্ন (Question) 5

z একটি জটিল সংখ্যা হলে, $\arg(z+i) - \arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$ সমীকরণটি দ্বারা কার্তেসীয় সমতলে নির্দেশিত সঞ্চারপথের চাপের দৈর্ঘ্য কত একক?

If z is a complex number, what is the arc length of the locus represented by the equation $arg(z+i) - arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$ on the cartesian plane?

A) $\frac{\pi}{2}$ একক ($\frac{\pi}{2}$ units)

B) π একক (π units)

C) 2π একক (2π units)

D) 4π একক (4π units)

উত্তর: B) π একক

সমাধান (Solution)

জ্যামিতিক আর্গুমেন্টের ব্যাখ্যা হতে আমরা জানি, সমীকরণ $\arg(z+i) - \arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$ দ্বারা একটি অর্ধবৃত্ত নির্দেশিত হয়, যার ব্যাস হলো $i(0,1)$ এবং $-i(0,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ।

ব্যাসটির দৈর্ঘ্য $d = 1 - (-1) = 2$ একক। অতএব, সঞ্চারপথ রূপী অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $R = 1$ একক।

আমরা জানি, অর্ধবৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্য $L = \pi R$। সুতরাং, নির্ণেয় সঞ্চারপথের চাপের দৈর্ঘ্য হবে:

$$L = \pi \times 1 = \pi \text{ একক}$$

প্রশ্ন (Question) 6

জটিল সমীকরণ $z^3 + i\frac{|z|^2}{\bar{z}} = 0$ এর সমাধান সংখ্যা কতটি?

The number of solutions to the complex equation $z^3 + i\frac{|z|^2}{\bar{z}} = 0$ is:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

উত্তর: B) 2

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$z^3 + i\frac{|z|^2}{\bar{z}} = 0$$

যেহেতু সমীকরণের হরে $\bar{z}$ রয়েছে, সেহেতু জটিল সংখ্যা z অবশ্যই অশূন্য হতে হবে, অর্থাৎ $z \neq 0$।

আমরা জানি, জটিল সংখ্যার ধর্ম থেকে: $|z|^2 = z\bar{z}$ অতএব:

$$\frac{|z|^2}{\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}} = z$$

সমীকরণে এই মানটি বসিয়ে পাই:

$$z^3 + iz = 0$$

$$\Rightarrow z(z^2 + i) = 0$$

যেহেতু $z \neq 0$, সেহেতু আমরা লিখতে পারি:

$$z^2 + i = 0$$

$$\Rightarrow z^2 = -i$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান করলে আমরা পাই:

$$z = \pm\sqrt{-i}$$

আমরা জানি, $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\pi/2}$। সুতরাং:

$$z = \pm e^{-i\pi/4} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

যেহেতু সমীকরণটি অশূন্য z এর জন্য সিদ্ধ হয়, তাই এর মোট সমাধান সংখ্যা হবে ঠিক 2 টি।

প্রশ্ন (Question) 7

যদি জটিল সংখ্যা z অসমতা $|z-2i| \leq 1$ সিদ্ধ করে এবং $|2z+1|$ এর সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান যথাক্রমে m ও M হয়, তবে $(M-m)^2$ এর মান কত?

If the complex number z satisfies the inequality $|z-2i| \leq 1$, and m and M denote the minimum and maximum values of $|2z+1|$ respectively, then the value of $(M-m)^2$ is:

A) 16

B) 17

C) 34

D) 51

উত্তর: A) 16

সমাধান (Solution)

দেওয়া আছে, $|z-2i| \leq 1$। এটি কার্তেসীয় সমতলে $z_0 = 2i \equiv (0,2)$ কেন্দ্র এবং $R = 1$ একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার চাকতি নির্দেশ করে।

আমরা $|2z+1|$ এর মানকে লিখতে পারি:

$$|2z+1| = 2\left|z - \left(-\frac{1}{2}\right)\right|$$

ধরি, নির্দিষ্ট বিন্দু $a = -\frac{1}{2} \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$। তাহলে $|z-a|$ হলো a বিন্দু হতে চাকতির যেকোনো বিন্দু z এর দূরত্ব।

বিন্দু a হতে বৃত্তের কেন্দ্র z_0 এর দূরত্ব d:

$$d = |z_0 - a| = \left|2i - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + 2i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

বৃত্তাকার চাকতির ভিতরের যেকোনো বিন্দু z এর জন্য, a হতে দূরত্বের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান হবে

যথাক্রমে:

$$\text{সর্বনিম্ন দূরত্ব} = d - R = \frac{\sqrt{17}}{2} - 1$$
$$\text{সর্বোচ্চ দূরত্ব} = d + R = \frac{\sqrt{17}}{2} + 1$$

অতএব, $|2z+1|$ এর সর্বনিম্ন মান m এবং সর্বোচ্চ মান M হবে:

$$m = 2 \times (d - R) = 2\left(\frac{\sqrt{17}}{2} - 1\right) = \sqrt{17} - 2$$
$$M = 2 \times (d + R) = 2\left(\frac{\sqrt{17}}{2} + 1\right) = \sqrt{17} + 2$$

এখন, এদের পার্থক্য:

$$M - m = (\sqrt{17} + 2) - (\sqrt{17} - 2) = 4$$

অতএব:

$$(M - m)^2 = 4^2 = 16$$

প্রশ্ন (Question) 8

যদি জটিল সংখ্যা z_1, z_2 এবং মূলবিন্দু $O(0)$ আর্গন্ড সমতলে একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু নির্দেশ করে, তবে $z_1^2 + z_2^2$ এর মান নিচের কোনটি?

If the complex numbers z_1, z_2 and the origin $O(0)$ form an equilateral triangle in the Argand plane, then $z_1^2 + z_2^2$ is equal to:

A) $2z_1z_2$

B) z_1z_2

C) $-z_1z_2$

D) 0

উত্তর: B) z_1z_2

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, জটিল সমতলে যেকোনো তিনটি শীর্ষবিন্দু z_1, z_2 এবং z_3 দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমবাহু হওয়ার শর্ত হলো:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \quad \text{--- (1)}$$

এখানে প্রদত্ত শীর্ষবিন্দু তিনটি হলো z_1, z_2 এবং মূলবিন্দু $z_3 = 0$। সমীকরণ (1) এ $z_3 = 0$ বসিয়ে পাই:

$$z_1^2 + z_2^2 + 0^2 = z_1z_2 + z_2(0) + (0)z_1$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$$

সুতরাং, $z_1^2 + z_2^2$ এর মান হবে z_1z_2।

প্রশ্ন (Question) 9

জটিল সমতলে অশূন্য জটিল সংখ্যা z এবং w এমন যে $zw = |z|^2$ এবং $|z - \bar{z}| + |w - \bar{w}| = 4$। যদি w পরিবর্তনশীল হয়, তবে z এর সঞ্চারপথের সমীকরণ কার্তেসীয় সমতলে কীরূপ রেখা নির্দেশ করে?

Let z and w be non-zero complex numbers such that $zw = |z|^2$ and $|z-\bar{z}|+|w-\bar{w}| = 4$. If w varies, what kind of line does the equation of the locus of z represent in the cartesian plane?

A) এক জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা (A pair of parallel straight lines)

B) মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্ত (A circle passing through the origin)

C) একটি উপবৃত্ত যার বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষ বরাবর (An ellipse with its major axis along the y-axis)

D) পরস্পর লম্ব দুটি সরলরেখা (Two mutually perpendicular straight lines)

উত্তর: A) এক জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা

সমাধান (Solution)

দেওয়া আছে:

$$zw = |z|^2$$

আমরা জানি, জটিল সংখ্যার ধর্ম থেকে: $|z|^2 = z\bar{z}$ অতএব:

$$zw = z\bar{z}$$

যেহেতু $z \neq 0$, তাই উভয় পক্ষকে z দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$w = \bar{z}$$

অনুরূপভাবে, $\bar{w} = z$ হবে।

এখন দ্বিতীয় সমীকরণে মান বসিয়ে পাই:

$$|z - \bar{z}| + |w - \bar{w}| = 4$$

$$\Rightarrow |z - \bar{z}| + |\bar{z} - z| = 4$$

যেহেতু $|z - \bar{z}| = |\bar{z} - z|$, সেহেতু:

$$2|z - \bar{z}| = 4 \Rightarrow |z - \bar{z}| = 2 \quad \text{--- (1)}$$

ধরি, $z = x + iy$। তাহলে $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$। সমীকরণ (1) এ মান বসিয়ে পাই:

$$|2iy| = 2 \Rightarrow 2|y| = 2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

এটি কার্তেসীয় সমতলে $y = 1$ এবং $y = -1$ নামক দুটি সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। অতএব, সঞ্চারপথটি এক জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা হবে।

প্রশ্ন (Question) 10

যদি $a \neq 0$ হয়, তবে ত্রিঘাত সমীকরণ $(z + ab)^3 = a^3$ এর মূলত্রয় আর্গন্ড সমতলে যে সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে, তার বাহুর দৈর্ঘ্য কত একক?

If $a \neq 0$, then the roots of the cubic equation $(z + ab)^3 = a^3$ represent the vertices of an equilateral triangle in the Argand plane of side length:

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}|a|$

B) $\sqrt{3}|a|$

C) $\sqrt{3}|b|$

D) $\frac{1}{\sqrt{3}}|ab|$

উত্তর: B) $\sqrt{3}|a|$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$(z+ab)^3 = a^3$$

যেহেতু $a \neq 0$, তাই সমীকরণটির উভয়পক্ষকে a^3 দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$\left(\frac{z+ab}{a}\right)^3 = 1$$

ধরি, $W = \frac{z+ab}{a}$। তাহলে সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$W^3 = 1$$

আমরা জানি, এককের তিনটি ঘনমূল হলো $1, \omega, \omega^2$। সুতরাং, W এর তিনটি মান হবে যথাক্রমে $1, \omega, \omega^2$। অতএব:

$$\frac{z+ab}{a} = 1 \Rightarrow z_1 = a - ab$$
$$\frac{z+ab}{a} = \omega \Rightarrow z_2 = a\omega - ab$$
$$\frac{z+ab}{a} = \omega^2 \Rightarrow z_3 = a\omega^2 - ab$$

এই তিনটি মূল জটিল সমতলে একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির যেকোনো একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হবে শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব:

$$L = |z_1 - z_2| = |(a - ab) - (a\omega - ab)|$$

$$\Rightarrow L = |a - a\omega| = |a(1-\omega)| = |a||1-\omega|$$

আমরা জানি, $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$। সুতরাং:

$$1 - \omega = 1 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

এর পরমমান:

$$|1-\omega| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

অতএব, বাহুর দৈর্ঘ্য:

$L = \sqrt{3}|a|$ একক

প্রশ্ন (Question) 11

জটিল সংখ্যা z_1, z_2, z_3 যদি $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে, তবে জটিল সমতলে বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি কেমন হবে?

If the complex numbers z_1, z_2, z_3 satisfy $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, then the triangle formed by these three points in the complex plane is:

A) সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ (Right-angled isosceles triangle)

B) সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral triangle)

C) বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene triangle)

D) স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (Obtuse-angled isosceles triangle)

উত্তর: B) সমবাহু ত্রিভুজ

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

আমরা জানি, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\pi/3}$। অতএব:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{-i\pi/3}$$

উভয় পক্ষে মডুলাস নিয়ে পাই:

$$\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = \left|e^{-i\pi/3}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1 - z_3|}{|z_2 - z_3|} = 1 \Rightarrow |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$$

ধরি, শীর্ষবিন্দু তিনটি হলো $A(z_1)$, $B(z_2)$ এবং সচিবিন্দু $C(z_3)$। অতএব, বাহুর দৈর্ঘ্য $CA = CB$। এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

আবার, সমীকরণের আর্গুমেন্ট নিয়ে পাই:

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \arg(e^{-i\pi/3}) = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$$

এটি নির্দেশ করে যে, CA এবং CB বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle C = 60^\circ$।

যেহেতু $CA = CB$ এবং $\angle C = 60^\circ$, সেহেতু অপর কোণ দুটি হবে:

$$\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

যেহেতু ত্রিভুজটির তিনটি কোণই সমান (প্রতিটি 60°), সেহেতু ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রশ্ন (Question) 12

জটিল সমীকরণ $\bar{z} = iz^2$ এর অশূন্য সমাধানগুলো নিচের কোনটি?

What are the non-zero solutions to the complex equation $\bar{z} = iz^2$?

A) $i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

B) $-i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

C) $i, \pm\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D) $-i, \pm\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

উত্তর: A) $i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$। প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$\bar{z} = iz^2$$

$$\Rightarrow x - iy = i(x + iy)^2$$

$$\Rightarrow x - iy = i(x^2 - y^2 + 2ixy)$$

$$\Rightarrow x - iy = -2xy + i(x^2 - y^2)$$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:

- বাস্তব অংশ হতে: $x = -2xy \Rightarrow x(1 + 2y) = 0$ --- (1)
- কাল্পনিক অংশ হতে: $-y = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 + y = 0$ --- (2)

সমীকরণ (1) থেকে আমরা দুটি ক্ষেত্র পাই:

1. **ক্ষেত্র-১:** যখন $x = 0$:
   সমীকরণ (2) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই:

$$-y^2 + y = 0 \Rightarrow y(1-y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ অথবা } y = 1$$

   সুতরাং, জটিল সংখ্যা দুটি হলো: $z_1 = 0$ এবংঘাট $z_2 = i$।

2. **ক্ষেত্র-২:** যখন $1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$:
   সমীকরণ (2) এ $y = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই:

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   সুতরাং, জটিল সংখ্যা দুটি হলো: $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ এবং $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$।

অতএব, সমীকরণটির অশূন্য সমাধানগুলো হলো: i, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ এবং $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$।

প্রশ্ন (Question) 13

যদি সমীকরণ $z^2 + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta = 0$ (যেখানে $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ এবং $\beta \neq 0$) এর একটি মূল সম্পূর্ণ বাস্তব হয়, তবে নিচের কোন শর্তটি সত্য?

If the equation $z^2 + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta = 0$ (where $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ and $\beta \neq 0$) has a purely real root, then which of the following conditions is true?

A) $\beta^2\gamma - \alpha\beta\delta + \delta^2 = 0$

B) $\beta^2\gamma + \alpha\beta\delta - \delta^2 = 0$

C) $\beta^2\gamma - \alpha\beta\delta - \delta^2 = 0$

D) $\beta^2\gamma + \alpha\beta\delta + \delta^2 = 0$

উত্তর: A) $\beta^2\gamma - \alpha\beta\delta + \delta^2 = 0$

সমাধান (Solution)

ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূলটি হলো x (যেখানে $x \in \mathbb{R}$)। সমীকরণে $z = x$ বসিয়ে পাই:

$$x^2 + (\alpha + i\beta)x + \gamma + i\delta = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + \alpha x + \gamma) + i(\beta x + \delta) = 0$$

যেহেতু $x, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ বাস্তব সংখ্যা, সেহেতু বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ আলাদাভাবে 0 এর সমান হবে:

- বাস্তব অংশ হতে: $x^2 + \alpha x + \gamma = 0$ --- (1)
- কাল্পনিক অংশ হতে: $\beta x + \delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{\delta}{\beta}$ (যেহেতু $\beta \neq 0$)

এখন সমীকরণ (1) এ x এর এই মানটি বসিয়ে পাই:

$$\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^2 + \alpha\left(-\frac{\delta}{\beta}\right) + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{\beta^2} - \frac{\alpha\delta}{\beta} + \gamma = 0$$

উভয় পক্ষকে β^2 দ্বারা গুণ করে পাই:

$$\delta^2 - \alpha\beta\delta + \beta^2\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2\gamma - \alpha\beta\delta + \delta^2 = 0$$

প্রশ্ন (Question) 14

যদি ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হয়, তবে $S = \sum_{r=1}^{10}(r-\omega)(r-\omega^2)$ এর সরলীকৃত মান কত?

If ω is a non-real cube root of unity, then what is the simplified value of $S = \sum_{r=1}^{10}(r-\omega)(r-\omega^2)$?

A) 385

B) 440

C) 450

D) 515

উত্তর: c) 450

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূলের ধর্মাবলি থেকে: $\omega + \omega^2 = -1$ এবং $\omega^3 = 1$। এখন প্রতিটি পদের গুণফল বের করি:

$$(r-\omega)(r-\omega^2) = r^2 - r(\omega+\omega^2) + \omega^3 = r^2 + r + 1$$

সুতরাং, সমষ্টিটিকে লেখা যায়:

$$S = \sum_{r=1}^{10}(r^2+r+1) = \sum_{r=1}^{10} r^2 + \sum_{r=1}^{10} r + \sum_{r=1}^{10} 1$$

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি এবং সাধারণ সমষ্টির সূত্রাবলি:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 10$ এর জন্য:

$$\sum_{r=1}^{10} r^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 10$ এর জন্য:

$$\sum_{r=1}^{10} r = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

এবং $\sum_{r=1}^{10} 1 = 10$।

অতএব, মোট সমষ্টি:

$$S = 385 + 55 + 10 = 450$$

প্রশ্ন (Question) 15

জটিল সমতলে $\arg(z-1) - \arg(z+i) = \pi$ সমীকরণটি দ্বারা কার্তেসীয় সমতলে কীরূপ জ্যামিতিক চিত্র নির্দেশিত হয়?

What geometric figure does the equation $arg(z-1) - arg(z+i) = \pi$ represent in the cartesian plane?

A) $(1,0)$ এবং $(0,-1)$ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের মধ্যবর্তী অংশ (The line segment joining $(1,0)$ and $(0,-1)$ excluding the endpoints)

B) $(1,0)$ এবং $(0,-1)$ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের বাইরের বর্ধিতাংশ (The line segment joining $(1,0)$ and $(0,-1)$ extended outwards)

C) একটি বৃত্ত যার ব্যাস $(1,0)$ ও $(0,-1)$ বিন্দুগামী (A circle with diameter passing through $(1,0)$ and $(0,-1)$)

D) মূলবিন্দুগামী একটি পরাবৃত্ত (A parabola passing through the origin)

উত্তর: A) $(1,0)$ এবং $(0,-1)$ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের মধ্যবর্তী অংশ

সমাধান (Solution)

ধরি, $z_1 = 1 \equiv (1,0)$ এবং $z_2 = -i \equiv (0,-1)$ দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু। প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \pi$$

আমরা জানি, কোনো জটিল অনুপাতের আর্গুমেন্ট π হওয়ার অর্থ হলো লব ও হরের ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী। অর্থাৎ, ভেক্টর $(z-z_1)$ এবং $(z-z_2)$ একই সরলরেখায় কিন্তু বিপরীত অভিমুখে অবস্থান করে।

এটি তখনই সম্ভব যখন চলমান বিন্দু z, $z_1(1,0)$ এবং $z_2(0,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবর্তী অঞ্চলে অবস্থান করে (প্রান্তবিন্দুদ্বয় ব্যতীত, কারণ $z = z_1$ হলে আর্গুমেন্ট অসংজ্ঞায়িত হয়)। অতএব, সঞ্চারপথটি হবে $(1,0)$ ও $(0,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী উন্মুক্ত রেখাংশ।

প্রশ্ন (Question) 16

যদি z একটি জটিল সংখ্যা হয় যেন $|z-3|+|z+3|=10$ হয়, তবে $|z|$ এর সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের গুণফল কত?

If z is a complex number satisfying $|z-3|+|z+3|=10$, then what is the product of the minimum and maximum values of $|z|$?

A) 12

B) 20

C) 15

D) 25

উত্তর: B) 20

সমাধান (Solution)

সমীকরণ $|z-3|+|z+3|=10$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে যার উপকেন্দ্রদ্বয় (foci) $s_1=3\equiv(3,0)$ এবং সচিবিন্দু $s_2=-3\equiv(-3,0)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

উপবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে, উপকেন্দ্রদ্বয় হতে যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান:

$$2a=10\Rightarrow a=5 \quad \text{(বৃহৎ অর্ধ-অক্ষ)}$$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব:

$$2ae=|3-(-3)|=6\Rightarrow ae=3$$

যেহেতু $a=5$, সেহেতু উৎকেন্দ্রতা $e=\frac{3}{5}$।

এখন, ক্ষুদ্র অর্ধ-অক্ষ b নির্ণয় করি:

$$b=a\sqrt{1-e^2}=5\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=5\sqrt{1-\frac{9}{25}}=5\sqrt{\frac{16}{25}}=4$$

মূলবিন্দু (যা উপবৃত্তের কেন্দ্র) হতে উপবৃত্তের যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব $|z|$। মূলবিন্দু হতে উপবৃত্তের দূরত্বের সর্বোচ্চ মান হবে বৃহৎ অর্ধ-অক্ষ $a=5$ এবং সর্বনিম্ন মান হবে ক্ষুদ্র অর্ধ-অক্ষ $b=4$।

অতএব, সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের গুণফল হবে:

$$|z|_{\text{max}} \times |z|_{\text{min}} = 5 \times 4 = 20$$

প্রশ্ন (Question) 17

যদি সমীকরণ $(z+1)^5 = z^5$ এর মূলগুলোর বাস্তব অংশের যোগফল S হয়, তবে S এর মান কত?

If the sum of the real parts of the roots of the equation $(z+1)^5 = z^5$ is S, then what is the value of S?

A) -2

B) $-\frac{5}{2}$

C) -1

D) $-\frac{1}{2}$

উত্তর: A) -2

সমাধান (Solution)

সমীকরণটি হলো:

$$(z+1)^5 = z^5$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির মাধ্যমে বিস্তার করে পাই:

$$z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = z^5$$

$$\Rightarrow 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = 0$$

এটি একটি 4-ঘাতী সমীকরণ, যার 4টি মূল রয়েছে। এখন মূলগুলো বের করার জন্য সমীকরণটিকে লিখতে পারি:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{z} = e^{i2k\pi/5} \quad \text{(যেখানে } k = 1, 2, 3, 4;\ k = 0 \text{ এর জন্য কোনো সসীম সমাধান নেই)}$$

ধরি, $\alpha_k = e^{i2k\pi/5} = \cos(2k\pi/5) + i\sin(2k\pi/5)$। তাহলে:

$$\frac{1}{z} = \alpha_k - 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{\cos\theta - 1 + i\sin\theta} \quad (\text{যেখানে } \theta = 2k\pi/5)$$

লব ও হরকে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা দ্বারা গুণ করে পাই:

$$z = \frac{(\cos\theta - 1) - i\sin\theta}{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = \frac{(\cos\theta - 1) - i\sin\theta}{\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta}$$

$$z = \frac{(\cos\theta - 1) - i\sin\theta}{2(1 - \cos\theta)}$$

বাস্তব অংশ আলাদা করে পাই:

$$\text{Re}(z) = \frac{\cos\theta - 1}{2(1 - \cos\theta)} = -\frac{1 - \cos\theta}{2(1 - \cos\theta)} = -\frac{1}{2}$$

দেখা যাচ্ছে যে, প্রতিটি মূলের বাস্তব অংশই ধ্রুবক এবং তা $-\frac{1}{2}$। যেহেতু সমীকরণটির মোট 4টি মূল রয়েছে, সেহেতু মূলগুলোর বাস্তব অংশের যোগফল হবে:

$$S = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

প্রশ্ন (Question) 18

যদি ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হয়, তবে $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)\ldots$ ধারাটির $2n$ সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল কত?

If ω is a non-real cube root of unity, then what is the product of $2n$ factors of the series $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)\ldots$?

A) 2^{2n}

B) 2^n

C) 4^n

D) 2^{3n}

উত্তর: C) 4^n

সমাধান (Solution)

ধারাটির প্রথম কয়েকটি উৎপাদককে এককের কাল্পনিক ঘনমূলের ধর্মাবলি ($1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং $\omega^3 = 1$) ব্যবহার করে সরল করি:

- **১ম উৎপাদক:** $1 - \omega + \omega^2 = (1 + \omega^2) - \omega = -\omega - \omega = -2\omega$
- **২য় উৎপাদক:** $1 - \omega^2 + \omega^4 = 1 - \omega^2 + \omega$ (যেহেতু $\omega^4 = \omega^3 \cdot \omega = \omega$)
  $\Rightarrow (1 + \omega) - \omega^2 = -\omega^2 - \omega^2 = -2\omega^2$
- **৩য় উৎপাদক:** $1 - \omega^4 + \omega^8 = 1 - \omega + \omega^2 = -2\omega$ (যেহেতু $\omega^8 = \omega^6 \cdot \omega^2 = \omega^2$)
- **৪র্থ উৎপাদক:** $1 - \omega^8 + \omega^{16} = 1 - \omega^2 + \omega = -2\omega^2$

দেখা যাচ্ছে যে, উৎপাদকগুলো পর্যায়ক্রমে -2ω এবং $-2\omega^2$ হিসেবে পুনরাবৃত্ত হচ্ছে। যেহেতু মোট উৎপাদকের সংখ্যা $2n$ (যা একটি জোড় সংখ্যা), সেহেতু এখানে ঠিক n সংখ্যক পদ -2ω এবং n সংখ্যক পদ $-2\omega^2$ থাকবে।

অতএব, নির্ণেয় গুণফল:

$$P = (-2\omega)^n \cdot (-2\omega^2)^n = [(-2\omega)(-2\omega^2)]^n$$

$$\Rightarrow P = [4\omega^3]^n$$

যেহেতু $\omega^3 = 1$, সেহেতু:

$$P = [4(1)]^n = 4^n$$

প্রশ্ন (Question) 19

যদি অশূন্য জটিল সংখ্যা z এর জন্য $\frac{z-i}{z+i}$ একটি সম্পূর্ণ বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে জটিল সমতলে z এর সঞ্চারপথ কোনটি?

If for a non-zero complex number z, $\frac{z-i}{z+i}$ is a purely real number, then what is the locus of z in the complex plane?

A) x-অক্ষ (The x-axis)

B) y-অক্ষ, কিন্তু $i(0, -1)$ বিন্দু ব্যতীত (The y-axis, excluding the point $i(0, -1)$)

C) একক বৃত্ত (The unit circle)

D) মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা (A straight line passing through the origin)

উত্তর: B) y-অক্ষ, কিন্তু $i(0, -1)$ বিন্দু ব্যতীত

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = x + iy$। প্রদত্ত রাশি:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$$

লব ও হরকে হরের অনুবন্ধী দ্বারা গুণ করে পাই:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x^2+y^2-1)-2ix}{x^2+(y+1)^2}$$

যেহেতু এই রাশিটি সম্পূর্ণ বাস্তব, তাই এর কাল্পনিক অংশ অবশ্যই শূন্য হতে হবে:

$$\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

শর্ত থাকে যে, হর শূন্য হতে পারবে না, অর্থাৎ $z \neq -i \equiv (0,-1)$। যেহেতু $x = 0$ সমীকরণটি y-অক্ষ নির্দেশ করে, সেহেতু সঞ্চারপথটি হবে y-অক্ষ কিন্তু $i(0,-1)$ বিন্দু ব্যতীত।

প্রশ্ন (Question) 20

$|z| + z = 3 + i$ সমীকরণটির সঠিক সমাধান নিচের কোনটি?

What is the solution to the equation $|z| + z = 3 + i$?

A) $z = \frac{4}{3} + i$

B) $z = \frac{4}{3} - i$

C) $z = \frac{3}{4} + i$

D) $z = \frac{8}{3} + i$

উত্তর: A) $z = \frac{4}{3} + i$

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = x + iy$। প্রদত্ত সমীকরণ:

$$\sqrt{x^2+y^2} + x + iy = 3 + i$$

উভয় পক্ষের বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:

- কাল্পনিক অংশ হতে: $y = 1$
- বাস্তব অংশ হতে: $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 3$

এখানে $y = 1$ বসিয়ে পাই:

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3 - x$$

উভয়পক্ষে বর্গ করে পাই:

$$x^2 + 1 = (3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$$

$$\Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

অতএব, জটিল সংখ্যাটি হলো $z = \frac{4}{3} + i$।

প্রশ্ন (Question) 21

যদি দুটি অশূন্য জটিল সংখ্যা z_1 এবং z_2 এর জন্য $|z_1| = |z_2|$ এবং $\arg(z_1) + \arg(z_2) = 0$ হয়, তবে নিচের কোন সম্পর্কটি সত্য?

If for two non-zero complex numbers z_1 and z_2, $|z_1| = |z_2|$ and $\arg(z_1) + \arg(z_2) = 0$, then which of the following is true?

A) $z_1 = z_2$

B) $z_1 = -\bar{z}_2$

C) $z_1 = \bar{z}_2$

D) $z_1 z_2 = 1$

উত্তর: C) $z_1 = \bar{z}_2$

সমাধান (Solution)

ধরি, অয়লারের নিয়মানুযায়ী:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{এবং} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $r_1 = r_2 = r$ এবং $\theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1$। অতএব, আমরা লিখতে পারি:

$$z_2 = re^{-i\theta_1}$$

আমরা জানি, z_1 এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হলো $\bar{z}_1 = re^{-i\theta_1}$। সুতরাং, $z_2 = \bar{z}_1$, যা নির্দেশ করে $z_1 = \bar{z}_2$।

প্রশ্ন (Question) 22

$z = -1 - i\sqrt{3}$ জটিল সংখ্যাটির মুখ্য আর্গুমেন্ট (principal argument) কত?

What is the principal argument of the complex number $z = -1 - i\sqrt{3}$?

A) $\frac{2\pi}{3}$

B) $-\frac{2\pi}{3}$

C) $-\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{4\pi}{3}$

উত্তর: B) $-\frac{2\pi}{3}$

সমাধান (Solution)

$z = -1 - i\sqrt{3}$ জটিল সংখ্যাটির বাস্তব অংশ $x = -1 < 0$ এবং কাল্পনিক অংশ $y = -\sqrt{3} < 0$। যেহেতু এটি আর্গন্ড সমতলের ৩য় চতুর্ভাগে (third quadrant) অবস্থিত, সেহেতু এর মুখ্য আর্গুমেন্ট হবে:

$$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$

$$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = -\pi + \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\theta = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

প্রশ্ন (Question) 23

যদি ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হয়, তবে $(1 - \omega + \omega^2)^6$ এর মান কত?

If ω is a non-real cube root of unity, then what is the value of $(1 - \omega + \omega^2)^6$?

A) 64

B) -64

C) 128

D) 0

উত্তর: A) 64

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূলের ধর্ম থেকে: $1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow 1+\omega^2=-\omega$। প্রদত্ত রাশিতে এই মানটি প্রতিস্থাপন করি:

$$(1-\omega+\omega^2)^6=(1+\omega^2-\omega)^6$$

$$=(-\omega-\omega)^6=(-2\omega)^6$$

$$=(-2)^6\omega^6=64(\omega^3)^2$$

যেহেতু $\omega^3=1$, সেহেতু:

$$64\times 1^2=64$$

প্রশ্ন (Question) 24

দ্বিঘাত সমীকরণ $z^2-(3+i)z+(2+i)=0$ এর মূলদ্বয় নিচের কোনটি?

What are the roots of the quadratic equation $z^2-(3+i)z+(2+i)=0$?

A) 1 এবং $2-i$ (1 and $2-i$)

B) 1 এবং $2+i$ (1 and $2+i$)

C) -1 and $2+i$ (-1 and $2+i$)

D) i এবং $2+i$ (i and $2+i$)

উত্তর: B) 1 এবং $2+i$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটি হলো:

$$z^2 - (3+i)z + (2+i) = 0$$

আমরা মাঝখানের পদটি বিশ্লেষণ (splitting the middle term) করে পাই:

$$z^2 - z - (2+i)z + (2+i) = 0$$

$$\Rightarrow z(z-1) - (2+i)(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (z-1)(z-(2+i)) = 0$$

অতএব, সমীকরণটির সমাধান করলে মূলদ্বয় পাওয়া যায়:

$$z = 1 \quad \text{অথবা} \quad z = 2+i$$

প্রশ্ন (Question) 25

আর্গন্ড সমতলে $z^6 = 1$ সমীকরণের মূলগুলো যে বহুভুজ গঠন করে, তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

What is the area (in square units) of the polygon formed by the roots of the equation $z^6 = 1$ in the Argand plane?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B) $3\sqrt{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

উত্তর: A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

সমাধান (Solution)

সমীকরণ $z^6 = 1$ এর সমাধান করলে আমরা এককের ৬টি ষষ্ঠ মূল পাই, যা আর্গন্ড সমতলে একক ব্যাসার্ধের ($R = 1$) বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সুষম ষড়ভুজ (regular hexagon) গঠন করে।

একটি সুষম ষড়ভুজকে তার কেন্দ্র হতে সংযুক্ত করে ৬টি সমান সমবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়, যার

প্রতিটির বাহুর দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান অর্থাৎ 1 একক। একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল:

$$\text{Area}_{\text{triangle}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

অতএব, সম্পূর্ণ সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রফল হবে:

$$\text{Area}_{\text{total}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ বর্গ একক}$$

প্রশ্ন (Question) 26

দ্বিঘাত সমীকরণ $(c-5)x^2 - 2cx + (c-4) = 0$ $(c \neq 5)$ বিবেচনা করো। সমীকরণটির একটি মূল $(0, 2)$ ব্যবধিতে এবং অপর মূলটি $(2, 3)$ ব্যবধিতে অবস্থান করলে, c-এর সম্ভাব্য পূর্ণসাংখ্যিক মানসমূহের সেট S-এর সদস্য সংখ্যা কত?

Consider the quadratic equation $(c-5)x^2 - 2cx + (c-4) = 0$, $c \neq 5$. If one root of the equation lies in the interval $(0, 2)$ and its other root lies in the interval $(2, 3)$, then what is the number of elements in the set S of all integral values of c?

A) সদস্য সংখ্যা 11

B) সদস্য সংখ্যা 18

C) সদস্য সংখ্যা 10

D) সদস্য সংখ্যা 12

উত্তর: A) সদস্য সংখ্যা 11

সমাধান (Solution)

ধরি, $f(x) = (c-5)x^2 - 2cx + (c-4)$। মূলদ্বয় α এবং β যথাক্রমে $(0, 2)$ এবং $(2, 3)$ ব্যবধিতে থাকলে, $x = 2$ বিন্দুটি মূলদ্বয়ের মাঝে অবস্থিত হবে। অতএব, মূলের অবস্থানের শর্তানুসারে:

1. $(c-5) \cdot f(2) < 0$
2. $(c-5) \cdot f(0) > 0$
3. $(c-5) \cdot f(3) > 0$

এখন ফাংশনটির মানগুলো বের করি:

$$f(0) = c - 4$$
$$f(2) = (c-5)(4) - 2c(2) + (c-4) = 4c - 20 - 4c + c - 4 = c - 24$$
$$f(3) = (c-5)(9) - 2c(3) + (c-4) = 9c - 45 - 6c + c - 4 = 4c - 49$$

শর্ত প্রয়োগ করি:

- প্রথম শর্ত থেকে: $(c-5)(c-24) < 0 \implies 5 < c < 24$
- দ্বিতীয় শর্ত থেকে: $(c-5)(c-4) > 0 \implies c < 4$ অথবা $c > 5$ (যা $5 < c < 24$ ব্যবধিতে সর্বদা সত্য)
- তৃতীয় শর্ত থেকে: $(c-5)(4c-49) > 0$
  যেহেতু $5 < c < 24$, তাই $c - 5 > 0$। ফলে আমাদের প্রয়োজন $4c - 49 > 0 \implies c > 12.25$।

সবগুলো শর্তের সাধারণ ব্যবধি হলো:

$$12.25 < c < 24$$

যেহেতু c একটি পূর্ণসংখ্যা, তাই সম্ভাব্য মানগুলি হলো:

$$\{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}$$

সেট S-এর উপাদান সংখ্যা হলো $23 - 13 + 1 = 11$।

প্রশ্ন (Question) 27

যদি α, β, γ একটি পরিবর্তনশীল গুণোত্তর প্রগমনের (non-constant G.P.) তিনটি ক্রমিক পদ হয় এবং সমীকরণদ্বয় $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ এবং $x^2 + x - 1 = 0$-এর একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $\alpha(\beta + \gamma)$-এর মান নিচের কোনটির সমান?

If α, β and γ are three consecutive terms of a non-constant G.P. such that the equations $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ and $x^2 + x - 1 = 0$ have a common root, then $\alpha(\beta + \gamma)$ is equal to?

A) $\alpha\gamma$

B) 0

C) $\alpha\beta$

D) $\beta\gamma$

উত্তর: D) $\beta\gamma$

সমাধান (Solution)

যেহেতু α, β, γ গুণোত্তর প্রগমনে রয়েছে, তাই আমরা লিখতে পারি $\beta^2 = \alpha\gamma$। প্রথম সমীকরণটি হলো: $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$। এর নিশ্চায়ক $D_1 = (2\beta)^2 - 4\alpha\gamma = 4\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ (যেহেতু $\beta^2 = \alpha\gamma$)। নিশ্চায়ক শূন্য হওয়ায় প্রথম সমীকরণটির দুটি মূলই বাস্তব ও সমান হবে এবং সমান মূলটি হলো:

$$x = -\frac{2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

যেহেতু সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল রয়েছে, তাই সাধারণ মূলটি অবশ্যই প্রথম সমীকরণের এই একমাত্র অনন্য মূল $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ হতে হবে। এই মূলটি দ্বিতীয় সমীকরণ $x^2 + x - 1 = 0$ কে সিদ্ধ করবে:

$$\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) - 1 = 0 \implies \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\implies \beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2 = 0 \implies \alpha^2 + \alpha\beta = \beta^2 \quad \text{--- (i)}$$

গুণোত্তর প্রগমন থেকে আমরা জানি $\beta^2 = \alpha\gamma$। সমীকরণ (i)-এ এটি বসালে পাই:

$$\alpha^2 + \alpha\beta = \alpha\gamma \implies \alpha(\alpha + \beta - \gamma) = 0$$

যেহেতু $\alpha \neq 0$ (গুণোত্তর প্রগমনের প্রথম পদ), সেহেতু:

$$\alpha + \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma - \beta$$

এখন আমাদের নির্ণেয় রাশিটির মান বের করতে হবে:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$\alpha = \gamma - \beta$ বসিয়ে পাই:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (\gamma - \beta)\beta + (\gamma - \beta)\gamma = \beta\gamma - \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \gamma^2 - \beta^2$$

আবার, গুণোত্তর প্রগমনের শর্ত $\beta^2 = \alpha\gamma \implies \beta^2 = (\gamma - \beta)\gamma \implies \beta^2 = \gamma^2 - \beta\gamma \implies \gamma^2 - \beta^2 = \beta\gamma$। অতএব, $\alpha(\beta + \gamma) = \beta\gamma$।

প্রশ্ন (Question) 28

যদি α এবং β সমীকরণ $x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0$-এর মূলদ্বয় হয়, তবে $\frac{\alpha^{23}+\beta^{23}+\alpha^{14}+\beta^{14}}{\alpha^{15}+\beta^{15}+\alpha^{10}+\beta^{10}}$ রাশিটির মান কত?

If α and β are the roots of the quadratic equation $x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0$, then what is the value of $\frac{\alpha^{23}+\beta^{23}+\alpha^{14}+\beta^{14}}{\alpha^{15}+\beta^{15}+\alpha^{10}+\beta^{10}}$?

A) রাশিটির মান 729

B) রাশিটির মান 72

C) রাশিটির মান 81

D) রাশিটির মান 9

উত্তর: C) রাশিটির মান 81

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0$-এর মূল α ও β হওয়ায় আমরা লিখতে পারি:

$$\alpha^2 + 3 = -\sqrt{6}\alpha$$

উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই:

$$(\alpha^2 + 3)^2 = 6\alpha^2 \implies \alpha^4 + 6\alpha^2 + 9 = 6\alpha^2 \implies \alpha^4 = -9$$

একইভাবে, $\beta^4 = -9$।

এখন মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি বের করি:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-\sqrt{6})^2 - 2(3) = 6 - 6 = 0$$

যেহেতু $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, আমাদের নির্ণেয় রাশিটি সরল করতে $\alpha^4 = -9$ ব্যবহার করে উচ্চতর ঘাতগুলোকে রূপান্তর করি:

$$\begin{aligned}
\alpha^{23} &= (\alpha^4)^5\alpha^3 = (-9)^5\alpha^3 = -59049\alpha^3 \\
\alpha^{14} &= (\alpha^4)^3\alpha^2 = (-9)^3\alpha^2 = -729\alpha^2 \\
\alpha^{15} &= (\alpha^4)^3\alpha^3 = (-9)^3\alpha^3 = -729\alpha^3 \\
\alpha^{10} &= (\alpha^4)^2\alpha^2 = (-9)^2\alpha^2 = 81\alpha^2
\end{aligned}$$

অনুরূপভাবে β-এর ক্ষেত্রেও একই রূপান্তর প্রযোজ্য হবে।

এখন নির্ণেয় রাশিতে মানগুলো বসাই:

$$\text{লব} = (\alpha^{23} + \beta^{23}) + (\alpha^{14} + \beta^{14}) = -59049(\alpha^3 + \beta^3) - 729(\alpha^2 + \beta^2)$$

যেহেতু $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, লবটি হয়: $-59049(\alpha^3 + \beta^3)$।

$$\text{হর} = (\alpha^{15} + \beta^{15}) + (\alpha^{10} + \beta^{10}) = -729(\alpha^3 + \beta^3) + 81(\alpha^2 + \beta^2)$$

যেহেতু $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, হরটি হয়: $-729(\alpha^3 + \beta^3)$।

অতএব, নির্ণেয় রাশির মান:

$$\frac{\text{লব}}{\text{হর}} = \frac{-59049(\alpha^3 + \beta^3)}{-729(\alpha^3 + \beta^3)} = \frac{59049}{729} = 81$$

প্রশ্ন (Question) 29

যদি $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হয়, তবে $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5$-এর মান কত?

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, then what is the value of $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5$?

A) রাশিটির মান -16 হবে

B) রাশিটির মান 16 হবে

C) রাশিটির মান -12 হবে

D) রাশিটির মান 12 হবে

উত্তর: A) রাশিটির মান -16 হবে

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণটি হলো $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$। এখানে সহগগুলো হলো:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -1$$

নিউটন ও ওয়্যারিং-এর সমষ্টি সূত্র (Newton's Sums) অনুসারে, $S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$ এর জন্য

রিকারেন্স সম্পর্কটি হলো:

$$S_k + a_1 S_{k-1} + a_2 S_{k-2} + a_3 S_{k-3} = 0 \quad (\text{যখন } k \geq 3)$$

এবং নিম্নতর ঘাতের জন্য:

$$S_1 + a_1 = 0 \implies S_1 + 1 = 0 \implies S_1 = -1$$
$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \implies S_2 + 1(-1) + 2(-2) = 0 \implies S_2 - 1 - 4 = 0 \implies S_2 = 5$$
$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0 \implies S_3 + 1(5) - 2(-1) + 3(-1) = 0 \implies S_3 + 5 + 2 - 3 = 0 \implies S_3 =$$

এখন রিকারেন্স সম্পর্ক ব্যবহার করে উচ্চতর ঘাতগুলোর মান বের করি:

- $k = 4$ **এর জন্য:**

$$S_4 + a_1 S_3 + a_2 S_2 + a_3 S_1 = 0 \implies S_4 + 1(-4) - 2(5) - 1(-1) = 0$$

$$\implies S_4 - 4 - 10 + 1 = 0 \implies S_4 = 13$$

- $k = 5$ **এর জন্য:**

$$S_5 + a_1 S_4 + a_2 S_3 + a_3 S_2 = 0 \implies S_5 + 1(13) - 2(-4) - 1(5) = 0$$

$$\implies S_5 + 13 + 8 - 5 = 0 \implies S_5 = -16$$

অতএব, $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = -16$।

প্রশ্ন (Question) 30

যদি $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $[0, 4]$ ব্যবধিতে থাকে, তবে a-এর পূর্ণসাংখ্যিক মানের সমষ্টি কত?

If the roots of the equation $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ lie in the interval $[0, 4]$, then what is the sum of the integral values of a?

A) সমষ্টির মান 3 হবে

B) সমষ্টির মান 1 হবে

C) সমষ্টির মান 2 হবে

D) সমষ্টির মান 0 হবে

উত্তর: A) সমষ্টির মান 3 হবে

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটি হলো $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$। শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করে মূলদ্বয় বের করি:

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4(1)(a^2 - a)}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4a}}{2} = a \pm \sqrt{a}$$

মূলদ্বয় বাস্তব হওয়ার জন্য শর্ত হলো: $a \geq 0$।

যেহেতু মূলদ্বয় $[0, 4]$ ব্যবধিতে থাকে, তাই আমাদের নিচের অসমতা দুটি সিদ্ধ হতে হবে:

1. $a - \sqrt{a} \geq 0 \implies \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) \geq 0 \implies \sqrt{a} \geq 1$ অথবা $\sqrt{a} = 0$
   অতএব, $a \geq 1$ অথবা $a = 0$।

2. $a + \sqrt{a} \leq 4$
   ধরি,ভূমির চলক পরিবর্তন করে $u = \sqrt{a}$ ধরি। তাহলে অসমতাটি হয় $u^2 + u - 4 \leq 0$। দ্বিঘাত সমীকরণ $u^2 + u - 4 = 0$ এর সমাধান হলো: $u = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$। যেহেতু $u \geq 0$, তাই $u \leq \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$। $\sqrt{17} \approx 4.123$ ব্যবহার করে পাই: $u \leq \frac{4.123 - 1}{2} = 1.56 \implies a \leq (1.56)^2 \approx 2.44$।

এখন উভয় শর্তের সাধারণ ব্যবধি হলো: $a \in [1, 2.44] \cup \{0\}$। এর মধ্যে থাকা a-এর পূর্ণসাংখ্যিক মানগুলি হলো: $a = 0, 1, 2$। পূর্ণসাংখ্যিক মানসমূহের সমষ্টি: $0 + 1 + 2 = 3$।

প্রশ্ন (Question) 31

বাস্তব চলক x-এর জন্য, $x^4 - 2x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 = 0$ সমীকরণটির কতটি বাস্তব সমাধান রয়েছে?

For a real variable x, how many real solutions does the equation $x^4 - 2x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 = 0$ have?

A) বাস্তব সমাধানের সংখ্যা 0

B) বাস্তব সমাধানের সংখ্যা 1

C) বাস্তব সমাধানের সংখ্যা 2

D) বাস্তব সমাধানের সংখ্যা 4

উত্তর: C) বাস্তব সমাধানের সংখ্যা 2

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণটি পূর্ণবর্গ আকারে সাজানোর চেষ্টা করি:

$$x^4 - 2x^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 - \sin^4\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\implies \left(x^2 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 + (1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))(1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)) = 0$$

$$\implies \left(x^2 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)(1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)) = 0$$

যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গের যোগফল শূন্য হতে হলে প্রতিটি পদকে পৃথকভাবে শূন্য হতে হবে:

- দ্বিতীয় পদ থেকে: $\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)(1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)) = 0$
  যেহেতু $1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq 1 > 0$, তাই অবশ্যই:

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \implies \frac{\pi x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \implies x = 2k+1 \quad (\text{যেখানে } k \in \mathbb{Z})$$

- প্রথম পদ থেকে: $x^2 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \implies x^2 = \sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$
  যেহেতু $2k+1$ একটি বিজোড় সংখ্যা, তাই $\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 1$। অতএব, $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$।

যেহেতু 1 এবং -1 উভয়ই বিজোড় পূর্ণসংখ্যা, তাই এরা উভয় শর্তই সিদ্ধ করে। সুতরাং সমীকরণটির বাস্তব সমাধান কেবল 2 টি (যথাক্রমে 1 এবং -1)।

প্রশ্ন (Question) 32

$P(x) = ax^2 + bx + c$ একটি পূর্ণসাংখ্যিক সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদী (যেখানে $a > 0$ এবং $a, b, c \in \mathbb{Z}$)। যদি $P(1) = 0$, $50 < P(7) < 60$ এবং $70 < P(8) < 80$ হয়, তবে $P(10)$-এর মান কত?

Let $P(x) = ax^2 + bx + c$ be a quadratic polynomial with integer coefficients where $a > 0$ and $a, b, c \in \mathbb{Z}$. If $P(1) = 0$, $50 < P(7) < 60$, and $70 < P(8) < 80$, then what is the value of $P(10)$?

A) রাশিটির মান 120 হবে

B) রাশিটির মান 135 হবে

C) রাশিটির মান 150 হবে

D) রাশিটির মান 165 হবে

উত্তর: B) রাশিটির মান 135 হবে

সমাধান (Solution)

যেহেতু $P(1) = a(1)^2 + b(1) + c = 0 \implies c = -a - b$। বহুপদীটিকে আমরা লিখতে পারি:

$$P(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(a(x + 1) + b)$$

এখন প্রদত্ত মানগুলো বসাই:

- $P(7) = (7 - 1)(a(7 + 1) + b) = 6(8a + b)$
  শর্তানুসারে: $50 < 6(8a+b) < 60 \implies \frac{50}{6} < 8a+b < \frac{60}{6} \implies 8.33 < 8a+b < 10$
  যেহেতু a এবং b পূর্ণসংখ্যা, তাই $8a+b$ অবশ্যই একটি পূর্ণসংখ্যা হতে হবে। অতএব, $8a+b = 9$ --- (i)।

- $P(8) = (8 - 1)(a(8 + 1) + b) = 7(9a + b)$
  শর্তানুসারে: $70 < 7(9a+b) < 80 \implies \frac{70}{7} < 9a+b < \frac{80}{7} \implies 10 < 9a+b < 11.43$
  যেহেতু $9a + b$ একটি পূর্ণসংখ্যা, তাই $9a + b = 11$ --- (ii)।

এখন সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই:

$$(9a + b) - (8a + b) = 11 - 9 \implies a = 2$$

a-এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই:

$$8(2) + b = 9 \implies 16 + b = 9 \implies b = -7$$

তাহলে $c = -a - b = -2 - (-7) = 5$। সুতরাং বহুপদীটি হলো:

$$P(x) = 2x^2 - 7x + 5$$

এখন $P(10)$ নির্ণয় করি:

$$P(10) = 2(10)^2 - 7(10) + 5 = 200 - 70 + 5 = 135$$

প্রশ্ন (Question) 33

যদি $z^2 + z + 1 = 0$ হয়, তবে $\sum_{k=1}^{24} \left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)^2$-এর মান কত?

If $z^2 + z + 1 = 0$, then what is the value of $\sum_{k=1}^{24} \left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)^2$?

A) সমষ্টির মান 48 হবে

B) সমষ্টির মান 36 হবে

C) সমষ্টির মান 24 হবে

D) সমষ্টির মান 72 হবে

উত্তর: A) সমষ্টির মান 48 হবে

সমাধান (Solution)

দেওয়া আছে $z^2 + z + 1 = 0$। এর মূলগুলো হলো এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω এবং ω^2। ধরি, $z = \omega$। তাহলে আমাদের বের করতে হবে:

$$S = \sum_{k=1}^{24} \left(\omega^k + \frac{1}{\omega^k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{24} \left(\omega^k + \omega^{-k}\right)^2$$

যেহেতু $\omega^3 = 1$, তাই আমরা দুটি Case বিবেচনা করতে পারি:

1. **k যদি 3 এর গুণিতক হয় (অর্থাৎ $k = 3m$):**

$$\omega^k + \omega^{-k} = \omega^{3m} + \omega^{-3m} = 1 + 1 = 2$$

অতএব, $\left(\omega^k + \frac{1}{\omega^k}\right)^2 = 2^2 = 4$। 1 থেকে 24 এর মধ্যে 3 এর গুণিতক সংখ্যা রয়েছে মোট $\frac{24}{3} = 8$ টি।

2. **k যদি 3 এর গুণিতক না হয়:**
সেক্ষেত্রে $\omega^k + \omega^{-k} = \omega^k + \omega^{2k}$ (যেহেতু $\omega^3 = 1 \implies \omega^{-k} = \omega^{2k}$)। আমরা জানি, $1 + \omega^k + \omega^{2k} = 0 \implies \omega^k + \omega^{2k} = -1$। অতএব, $\left(\omega^k + \frac{1}{\omega^k}\right)^2 = (-1)^2 = 1$। মোট 24 টি পদের মধ্যে 3 এর গুণিতক নয় এমন পদ সংখ্যা হলো $24 - 8 = 16$ টি।

সুতরাং সম্পূর্ণ সমষ্টি:

$$S = (8 \times 4) + (16 \times 1) = 32 + 16 = 48$$

প্রশ্ন (Question) 34

যদি a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা হয় যেখানে $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, এবং $a^3+b^3+c^3=8$ হয়, তবে $a^4+b^4+c^4$-এর মান কত?

If a, b, c are three real numbers such that $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, and $a^3+b^3+c^3=8$, then what is the value of $a^4+b^4+c^4$?

A) রাশিটির মান 18 হবে

B) রাশিটির মান 12 হবে

C) রাশিটির মান 15 হবে

D) রাশিটির মান 20 হবে

উত্তর: A) রাশিটির মান 18 হবে

সমাধান (Solution)

ধরি, a, b, c হলো একটি ত্রিঘাত সমীকরণ $x^3-e_1x^2+e_2x-e_3=0$ এর মূলত্রয়। যেখানে e_1, e_2, e_3 হলো প্রতিসম সহগ এবং $S_n=a^n+b^n+c^n$। দেওয়া আছে:

$$S_1=2, \quad S_2=6, \quad S_3=8$$

নিউটন ও ওয়্যারিং-এর সূত্র ব্যবহার করে পাই:

- $e_1=S_1=2$
- $S_2-e_1S_1+2e_2=0 \implies 6-2(2)+2e_2=0 \implies 2+2e_2=0 \implies e_2=-1$
- $S_3-e_1S_2+e_2S_1-3e_3=0 \implies 8-2(6)+(-1)(2)-3e_3=0$
  $\implies 8-12-2-3e_3=0 \implies -6-3e_3=0 \implies e_3=-2$

এখন S_4 এর জন্য সমীকরণটি হবে:

$$S_4-e_1S_3+e_2S_2-e_3S_1=0$$

$$\implies S_4-2(8)+(-1)(6)-(-2)(2)=0$$

$$\implies S_4-16-6+4=0 \implies S_4-18=0 \implies S_4=18$$

অতএব, $a^4+b^4+c^4=18$।

প্রশ্ন (Question) 35

ধরি, $\lambda \neq 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা। যদি $14x^2 - 31x + 3\lambda = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয় এবং $35x^2 - 53x + 4\lambda = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও γ হয়, তবে $\frac{3\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{4\alpha}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নিচের কোনটি?

Let $\lambda \neq 0$ be a real number. If α, β are the roots of the equation $14x^2 - 31x + 3\lambda = 0$ and α, γ are the roots of the equation $35x^2 - 53x + 4\lambda = 0$, then what is the quadratic equation whose roots are $\frac{3\alpha}{\beta}$ and $\frac{4\alpha}{\gamma}$?

A) $7x^2 + 245x - 250 = 0$

B) $49x^2 + 245x + 250 = 0$

C) $49x^2 - 245x + 250 = 0$

D) $7x^2 - 245x + 250 = 0$

উত্তর: C) $49x^2 - 245x + 250 = 0$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α। সুতরাং, আমরা পাই:

$$14\alpha^2 - 31\alpha + 3\lambda = 0 \quad \text{--- (i)}$$
$$35\alpha^2 - 53\alpha + 4\lambda = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

λ অপনয়ন করার জন্য সমীকরণ (i) কে 4 দ্বারা এবং (ii) কে 3 দ্বারা গুণ করি:

$$56\alpha^2 - 124\alpha + 12\lambda = 0$$
$$105\alpha^2 - 159\alpha + 12\lambda = 0$$

বিয়োগ করে পাই:

$$49\alpha^2 - 35\alpha = 0$$

যেহেতু $\lambda \neq 0$, তাই $\alpha \neq 0$। অতএব:

$$49\alpha = 35 \implies \alpha = \frac{5}{7}$$

এখন α-এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই:

$$14\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 31\left(\frac{5}{7}\right) + 3\lambda = 0 \implies 14\left(\frac{25}{49}\right) - \frac{155}{7} + 3\lambda = 0$$

$$\implies \frac{50}{7} - \frac{155}{7} + 3\lambda = 0 \implies -\frac{105}{7} + 3\lambda = 0 \implies -15 + 3\lambda = 0 \implies \lambda = 5$$

সমীকরণ (i)-এ $\lambda = 5$ বসিয়ে পাই $14x^2 - 31x + 15 = 0$। মূলদ্বয়ের গুণফল:

$$\alpha\beta = \frac{15}{14} \implies \frac{5}{7}\beta = \frac{15}{14} \implies \beta = \frac{3}{2}$$

সমীকরণ (ii)-এ $\lambda = 5$ বসিয়ে পাই $35x^2 - 53x + 20 = 0$। মূলদ্বয়ের গুণফল:

$$\alpha\gamma = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \implies \frac{5}{7}\gamma = \frac{4}{7} \implies \gamma = \frac{4}{5}$$

এখন নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়:

$$x_1 = \frac{3\alpha}{\beta} = \frac{3(5/7)}{3/2} = \frac{15/7}{3/2} = \frac{10}{7}$$
$$x_2 = \frac{4\alpha}{\gamma} = \frac{4(5/7)}{4/5} = \frac{20/7}{4/5} = \frac{25}{7}$$

মূলদ্বয়ের সমষ্টি:

$$x_1 + x_2 = \frac{10}{7} + \frac{25}{7} = 5$$

মূলদ্বয়ের গুণফল:

$$x_1x_2 = \frac{10}{7} \times \frac{25}{7} = \frac{250}{49}$$

নির্ণেয় সমীকরণ:

$$x^2 - 5x + \frac{250}{49} = 0 \implies 49x^2 - 245x + 250 = 0$$

প্রশ্ন (Question) 36

ধরি, p একটি পূর্ণসংখ্যা। যদি $x^2 - px + \frac{5}{4}p = 0$ সমীকরণের মূলগুলো মূলদ সংখ্যা হয়, তবে p-এর সকল সম্ভাব্য মানের সমষ্টি কত?

Let p be an integer. If the roots of the equation $x^2 - px + \frac{5}{4}p = 0$ are rational numbers, then what is the sum of all possible values of p?

A) সমষ্টির মান 14 হবে

B) সমষ্টির মান 9 হবে

C) সমষ্টির মান 15 হবে

D) সমষ্টির মান 5 হবে

উত্তর: A) সমষ্টির মান 14 হবে

সমাধান (Solution)

সমীকরণটির মূলগুলো মূলদ হওয়ার জন্য এর নিশ্চয়ক D অবশ্যই একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হতে হবে। এখানে,

$$D = (-p)^2 - 4(1)\left(\frac{5}{4}p\right) = p^2 - 5p$$

ধরি, $p^2 - 5p = k^2$ (যেখানে $k \in \mathbb{Z}$)। উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে পূর্ণবর্গ আকারে সাজাই:

$$4p^2 - 20p = 4k^2 \implies (2p-5)^2 - 25 = 4k^2 \implies (2p-5)^2 - (2k)^2 = 25$$

$$\implies (2p-5-2k)(2p-5+2k) = 25$$

যেহেতু p এবং k পূর্ণসংখ্যা, তাই উৎপাদকগুলো অবশ্যই 25-এর উৎপাদক হবে। 25-এর উৎপাদক জোড়াগুলো বিবেচনা করি:

1. $2p-5-2k = 1$ এবং $2p-5+2k = 25$
   যোগ করে পাই: $4p - 10 = 26 \implies 4p = 36 \implies p = 9$।
2. $2p-5-2k = -1$ এবং $2p-5+2k = -25$
   যোগ করে পাই: $4p - 10 = -26 \implies 4p = -16 \implies p = -4$ (গ্রহণযোগ্য নয়)।
3. $2p-5-2k = 5$ এবং $2p-5+2k = 5$
   যোগ করে পাই: $4p - 10 = 10 \implies 4p = 20 \implies p = 5$।
4. $2p-5-2k = -5$ এবং $2p-5+2k = -5$
   যোগ করে পাই: $4p - 10 = -10 \implies 4p = 0 \implies p = 0$।

অতএব, p-এর সম্ভাব্য পূর্ণসাংখ্যিক মানগুলো হলো: $p = 0, 5, 9$। পরামিতি p-এর সম্ভাব্য মানসমূহের সমষ্টি:

$$0 + 5 + 9 = 14$$

প্রশ্ন (Question) 37

b-এর কোন অবাস্তব মানের জন্য $x^2 + bx - 1 = 0$ এবং $x^2 + x + b = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকবে?

For which non-real value of b will the equations $x^2 + bx - 1 = 0$ and $x^2 + x + b = 0$ have a common root?

A) $b = -i\sqrt{5}$

B) $b = -i\sqrt{3}$

C) $b = i\sqrt{2}$

D) $b = \sqrt{2}$

উত্তর: B) $b = -i\sqrt{3}$

সমাধান (Solution)

ধরি, সমীকরণ দুটির সাধারণ মূলটি হলো α। তাহলে মূলটি দ্বারা সমীকরণ দুটি সিদ্ধ হবে:

$$\alpha^2 + b\alpha - 1 = 0 \quad \text{--- (i)}$$
$$\alpha^2 + \alpha + b = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই:

$$(b-1)\alpha - (1+b) = 0 \implies (b-1)\alpha = b+1 \implies \alpha = \frac{b+1}{b-1} \quad (\text{যেহেতু } b \neq 1)$$

এখন α-এর এই মানটি সমীকরণ (ii) এ বসিয়ে পাই:

$$\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2 + \frac{b+1}{b-1} + b = 0$$

উভয়পক্ষকে $(b-1)^2$ দ্বারা গুণ করি:

$$(b+1)^2 + (b+1)(b-1) + b(b-1)^2 = 0$$

$$\implies (b^2 + 2b + 1) + (b^2 - 1) + b(b^2 - 2b + 1) = 0$$

$$\implies 2b^2 + 2b + b^3 - 2b^2 + b = 0$$

$$\implies b^3 + 3b = 0 \implies b(b^2 + 3) = 0$$

যেহেতু আমাদের অবাস্তব (non-real) মান প্রয়োজন, তাই $b \neq 0$। অতএব:

$$b^2 + 3 = 0 \implies b^2 = -3 \implies b = \pm i\sqrt{3}$$

বিকল্পগুলোর মধ্যে সঠিক উত্তর হলো $b = -i\sqrt{3}$।

প্রশ্ন (Question) 38

যদি α এবং β সমীকরণ $x^2 - (5 + 3^{\log_3 5} - 5^{\log_5 5})x + 3(3^{\log_3 2} - 1) = 0$-এর মূলদ্বয় হয়, তবে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নিচের কোনটি?

If α and β are the roots of the equation $x^2 - (5 + 3^{\log_3 5} - 5^{\log_5 5})x + 3(3^{\log_3 2} - 1) = 0$, then which of the following is the equation whose roots are $\alpha + \frac{1}{\beta}$ and $\beta + \frac{1}{\alpha}$?

A) $3x^2 - 20x - 12 = 0$

B) $3x^2 - 10x - 4 = 0$

C) $3x^2 - 10x + 2 = 0$

D) $3x^2 - 20x + 16 = 0$

উত্তর: D) $3x^2 - 20x + 16 = 0$

সমাধান (Solution)

প্রথমে সমীকরণের সহগগুলোকে সরল করি:

1. **x-এর সহগ:** $5 + 3^{\log_3 5} - 5^{\log_5 5}$
   আমরা জানি, $3^{\log_3 5} = 5$ এবং $5^{\log_5 5} = 5^1 = 5$। অতএব, সহগটি হলো: $5 + 5 - 5 = 5$।

2. **ধ্রুবক পদ:** $3(3^{\log_3 2} - 1)$
   আমরা জানি, $3^{\log_3 2} = 2$। অতএব, ধ্রুবক পদটি হলো: $3(2 - 1) = 3$।

সুতরাং, সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

যেহেতু α ও β এই সমীকরণের মূল, তাই:

$$S = \alpha + \beta = 5 \quad \text{এবং} \quad P = \alpha\beta = 3$$

এখন, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় হলো $u = \alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $v = \beta + \frac{1}{\alpha}$।

- **নতুন মূলদ্বয়ের সমষ্টি:**

$$u + v = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = S + \frac{S}{P} = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$$

- **নতুন মূলদ্বয়ের গুণফল:**

$$uv = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = P + 2 + \frac{1}{P} = 3 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণটি হবে:

$$x^2 - (u + v)x + uv = 0 \implies x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{16}{3} = 0 \implies 3x^2 - 20x + 16 = 0$$

প্রশ্ন (Question) 39

যদি $3x^2 + \lambda x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয় এবং তাদের গুণাত্মক বিপরীতের বর্গের সমষ্টি $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 15$ হয়, তবে $6(\alpha^3 + \beta^3)^2$-এর মান কত?

If α and β are the roots of the equation $3x^2 + \lambda x - 1 = 0$ and the sum of the squares of their reciprocals is $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 15$, then what is the value of $6(\alpha^3 + \beta^3)^2$?

A) 18

B) 24

C) 36

D) 96

উত্তর: B) 24

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণ: $3x^2 + \lambda x - 1 = 0$। সহগ ও মূলের সম্পর্ক থেকে পাই:

$$\alpha + \beta = -\frac{\lambda}{3} \quad \text{এবং} \quad \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

দেওয়া আছে, মূলদ্বয়ের গুণাত্মক বিপরীতের বর্গের সমষ্টি 15:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=15 \implies \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=15 \implies \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=15$$

মানগুলো সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$$\frac{\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=15 \implies \frac{\frac{\lambda^2}{9}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}=15$$

$$\implies \lambda^2+6=15 \implies \lambda^2=9$$

এখন আমাদের $6(\alpha^3+\beta^3)^2$-এর মান বের করতে হবে। প্রথমে $\alpha^3+\beta^3$ নির্ণয় করি:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\implies \alpha^3+\beta^3=\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^3-3\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{\lambda}{3}\right)=-\frac{\lambda^3}{27}-\frac{\lambda}{3}$$

যেহেতু $\lambda^2=9$, তাই $\lambda=\pm 3$।

1. যদি $\lambda=3$ হয়:
$$\alpha^3+\beta^3=-\frac{27}{27}-\frac{3}{3}=-1-1=-2$$
2. যদি $\lambda=-3$ হয়:
$$\alpha^3+\beta^3=-\frac{-27}{27}-\frac{-3}{3}=1+1=2$$

উভয় ক্ষেত্রেই, $(\alpha^3+\beta^3)^2=(\pm 2)^2=4$।

সুতরাং:

$$6(\alpha^3+\beta^3)^2=6\times 4=24$$

প্রশ্ন (Question) 40

ব্যবধি $[0,\pi]$-এর মধ্যে $(81)^{\sin^2 x}+(81)^{\cos^2 x}=30$ সমীকরণটির মোট কতটি বাস্তব সমাধান রয়েছে?

What is the total number of real solutions to the equation $(81)^{\sin^2 x}+(81)^{\cos^2 x}=30$ *in the interval* $[0,\pi]$*?*

A) 2 টি

B) 4 টি

C) 8 টি

D) 6 টি

উত্তর: B) 4 টি

সমাধান (Solution)

ধরি, $y = (81)^{\sin^2 x}$। আমরা জানি, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$। অতএব:

$$(81)^{\cos^2 x} = (81)^{1-\sin^2 x} = \frac{81}{(81)^{\sin^2 x}} = \frac{81}{y}$$

প্রদত্ত সমীকরণে এটি বসিয়ে পাই:

$$y + \frac{81}{y} = 30 \implies y^2 - 30y + 81 = 0$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি:

$$y^2 - 27y - 3y + 81 = 0 \implies y(y-27) - 3(y-27) = 0 \implies (y-27)(y-3) = 0$$

অতএব, $y = 3$ অথবা $y = 27$।

1. **কেস ১:** $y = 3$

$$(81)^{\sin^2 x} = 3 \implies (3^4)^{\sin^2 x} = 3^1 \implies 4\sin^2 x = 1 \implies \sin^2 x = \frac{1}{4}$$
$$\implies \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

যেহেতু ব্যবধিটি হলো $[0, \pi]$, তাই $\sin x$ ঋণাত্মক হতে পারে না। অতএব:

$$\sin x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6} \text{ এবং } x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{(২টি বাস্তব সমাধান)}$$

2. **কেস ২:** $y = 27$

$$(81)^{\sin^2 x} = 27 \implies (3^4)^{\sin^2 x} = 3^3 \implies 4\sin^2 x = 3 \implies \sin^2 x = \frac{3}{4}$$
$$\implies \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ব্যবধি $[0, \pi]$-এ $\sin x \geq 0$ হওয়ায়:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} \text{ এবং } x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{(২টি বাস্তব সমাধান)}$$

সুতরাং, ব্যবধি $[0, \pi]$-এর মধ্যে প্রদত্ত সমীকরণটির মোট বাস্তব সমাধান সংখ্যা হলো $2 + 2 = 4$ টি।

প্রশ্ন (Question) 41

চলক x-এর সমীকরণ $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{2}{k}$-এর কোনো বাস্তব মূল না থাকলে, k (যেখানে $k \neq 0$)-এর সকল সম্ভাব্য পূর্ণসাংখ্যিক মানের সমষ্টি কত?

If the equation $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{2}{k}$ in x has no real roots, then what is the sum of all possible integral values of k (where $k \neq 0$)?

A) 55

B) 66

C) 78

D) 45

উত্তর: B) 66

সমাধান (Solution)

প্রথমে প্রদত্ত ভগ্নাংশ সমীকরণটি সরল করি:

$$\frac{2(x-2)-(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{k} \implies \frac{2x-4-x+1}{x^2-3x+2} = \frac{2}{k}$$

$$\implies \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2}{k}$$

বজ্রগুণন করে পাই:

$$2(x^2-3x+2) = k(x-3) \implies 2x^2-6x+4 = kx-3k$$

$$\implies 2x^2-(k+6)x+(3k+4) = 0$$

সমীকরণটির কোনো বাস্তব মূল না থাকার শর্ত হলো এর নিশ্চয়ক $D < 0$ হতে হবে:

$$D = [-(k+6)]^2 - 4(2)(3k+4) < 0$$

$$\implies (k^2+12k+36) - 8(3k+4) < 0$$

$$\implies k^2 + 12k + 36 - 24k - 32 < 0$$

$$\implies k^2 - 12k + 4 < 0$$

দ্বিঘাত সমীকরণ $k^2 - 12k + 4 = 0$ সমাধান করে এর মূলদ্বয় বের করি:

$$k = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{128}}{2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$$

যেহেতু $\sqrt{2} \approx 1.414$, তাই $4\sqrt{2} \approx 5.656$। অতএব, অসমতাটির সমাধান ব্যবধি হলো:

$$6 - 5.656 < k < 6 + 5.656 \implies 0.344 < k < 11.656$$

যেহেতু k একটি অশূন্য পূর্ণসংখ্যা, তাই k-এর সম্ভাব্য মানগুলো হলো:

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

সম্ভাব্য মানসমূহের সমষ্টি:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

প্রশ্ন (Question) 42

$\theta \in [0, 2\pi]$ এর কোন মানসমূহের জন্য $x^2 - 2x\cos\theta + \sin^2\theta = 0$ সমীকরণের উভয় মূলই বাস্তব হবে এবং $[-1, 2]$ ব্যবধিতে অবস্থান করবে?

For what values of $\theta \in [0, 2\pi]$ are both roots of the equation $x^2 - 2x\cos\theta + \sin^2\theta = 0$ real and lie in the interval $[-1, 2]$?

A) $\theta \in [0, \pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$

B) $\theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \arccos(1 - \sqrt{3})] \cup [2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}), 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$

C) $\theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$

D) $\theta \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$

উত্তর: B) $\theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \arccos(1 - \sqrt{3})] \cup [2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}), 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$

সমাধান (Solution)

ধরি, $f(x) = x^2 - 2x\cos\theta + \sin^2\theta$। উভয় মূল $[-1, 2]$ ব্যবধিতে বাস্তব থাকার জন্য প্রয়োজনীয় শর্তসমূহ:

1. **নিশ্চয়ক** $D \geq 0$:

$$(-2\cos\theta)^2 - 4(1)(\sin^2\theta) \geq 0 \implies 4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta \geq 0 \implies \cos^2\theta \geq \sin^2\theta$$

$$\implies \tan^2\theta \leq 1 \implies \theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$$

2. **শীর্ষবিন্দু** $-\frac{b}{2a} \in [-1, 2]$:

$$\frac{2\cos\theta}{2} \in [-1, 2] \implies \cos\theta \in [-1, 1] \quad \text{(যা সকল বাস্তব } \theta \text{ এর জন্য সর্বদা সত্য)}$$

3. $f(-1) \geq 0$:

$$(-1)^2 - 2(-1)\cos\theta + \sin^2\theta \geq 0 \implies 1 + 2\cos\theta + 1 - \cos^2\theta \geq 0$$

$$\implies \cos^2\theta - 2\cos\theta - 2 \leq 0$$

ধরি, $u = \cos\theta$। সমীকরণ $u^2 - 2u - 2 \leq 0$ এর সমাধান হলো: $1 - \sqrt{3} \leq \cos\theta \leq 1 + \sqrt{3}$। যেহেতু $\cos\theta \leq 1$, আমাদের শুধুমাত্র নিম্নসীমা প্রয়োজন: $\cos\theta \geq 1 - \sqrt{3} \approx -0.732$।

4. $f(2) \geq 0$:

$$2^2 - 2(2)\cos\theta + \sin^2\theta \geq 0 \implies 4 - 4\cos\theta + 1 - \cos^2\theta \geq 0$$

$$\implies \cos^2\theta + 4\cos\theta - 5 \leq 0 \implies (\cos\theta + 5)(\cos\theta - 1) \leq 0$$

$$\implies -5 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \text{(যা সর্বদা সত্য)}$$

এখন ১ এবং ৩ নং শর্তের ছেদ সেট (Intersection) নির্ণয় করি: $\cos\theta \geq 1 - \sqrt{3}$ শর্তের জন্য θ এর ব্যবধি হবে $[0, \arccos(1 - \sqrt{3})] \cup [2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}), 2\pi]$। যেহেতু $1 - \sqrt{3} \approx -0.732$, তাই $\arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 137^\circ \approx 2.39$ rad (যা $3\pi/4 \approx 2.35$ rad এর চেয়ে সামান্য বড়)। উভয় ব্যবধির সাধারণ অংশ হলো:

$$\theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \arccos(1 - \sqrt{3})] \cup [2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}), 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$$

প্রশ্ন (Question) 43

চতুর্ঘাত সমীকরণ $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + k = 0$-এর মূল চারটি সমান্তর প্রগমনে (A.P.) থাকলে, k-এর সঠিক মান কত?

If the four roots of the quartic equation $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + k = 0$ are in Arithmetic Progression (A.P.), then what is the correct value of k?

A) $k = 24$

B) $k = 16$

C) $k = -24$

D) $k = 9$

উত্তর: A) $k = 24$

সমাধান (Solution)

ধরি, সমান্তর প্রগমনে থাকা মূল চারটি হলো যথাক্রমে $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ (যার সাধারণ অন্তর $2d$)। সহগ ও মূলের সম্পর্ক থেকে পাই:

1. **মূলগুলোর সমষ্টি:**

$$(a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 10 \implies 4a = 10 \implies a = 2.5$$

2. **দুটি করে মূলের গুণফলের সমষ্টি:**

$$\sum \alpha\beta = 6a^2 - 10d^2 = 35$$

এখানে $a = 2.5 = 5/2$ বসিয়ে পাই:

$$6\left(\frac{25}{4}\right) - 10d^2 = 35 \implies \frac{75}{2} - 10d^2 = 35$$

$$\implies 37.5 - 10d^2 = 35 \implies 10d^2 = 2.5 \implies d^2 = 0.25 \implies d = \pm 0.5$$

অতএব, মূল চারটি হলো:

$$x_1 = 2.5 - 3(0.5) = 1$$
$$x_2 = 2.5 - 0.5 = 2$$
$$x_3 = 2.5 + 0.5 = 3$$
$$x_4 = 2.5 + 3(0.5) = 4$$

যেহেতু k হলো মূল চারটির গুণফল:

$$k = x_1x_2x_3x_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

প্রশ্ন (Question) 44

যদি $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় গুণোত্তর প্রগমনে (G.P.) থাকে, তবে বাস্তব পরামিতি k-এর সঠিক মান কত?

If the roots of the cubic equation $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ are in Geometric Progression (G.P.), then what is the correct value of the real parameter k?

A) $k = 36$

B) $k = 48$

C) $k = 56$

D) $k = 64$

উত্তর: C) $k = 56$

সমাধান (Solution)

ধরি, গুণোত্তর প্রগমনে থাকা মূলত্রয় হলো যথাক্রমে $\frac{a}{r}, a, ar$। মূল ও সহগের সম্পর্ক থেকে মূলত্রয়ের গুণফল:

$$\left(\frac{a}{r}\right) \cdot a \cdot (ar) = 64 \implies a^3 = 64 \implies a = 4$$

যেহেতু $a = 4$ সমীকরণটির একটি বাস্তব মূল, তাই এটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে:

$$4^3 - 14(4^2) + k(4) - 64 = 0$$

$$\implies 64 - 224 + 4k - 64 = 0$$

$$\implies 4k = 224 \implies k = 56$$

প্রশ্ন (Question) 45

যদি $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় বিপরীত প্রগমনে (H.P.) থাকে, তবে সহগসমূহের মধ্যে সঠিক সম্পর্কটি কোনটি?

If the roots of the cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ are in Harmonic Progression (H.P.), then what is the correct relation among the coefficients?

A) $2c^3 - 9bcd + 27ad^2 = 0$

B) $2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0$

C) $c^3 - 9bcd + 27ad^2 = 0$

D) $2c^3 - 9bcd + 27a^2d = 0$

উত্তর: A) $2c^3 - 9bcd + 27ad^2 = 0$

সমাধান (Solution)

যেহেতু মূলত্রয় বিপরীত প্রগমনে রয়েছে, তাই $x = \frac{1}{y}$ বসালে নতুন সমীকরণ $dy^3 + cy^2 + by + a = 0$ এর মূলগুলো সমান্তর প্রগমনে (A.P.) থাকবে। ধরি, এই সমান্তর প্রগমনে থাকা মূলত্রয় হলো $u - v, u, u + v$। মূলসমূহের সমষ্টি থেকে পাই:

$$3u = -\frac{c}{d} \implies u = -\frac{c}{3d}$$

যেহেতু u সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে:

$$d\left(-\frac{c}{3d}\right)^3 + c\left(-\frac{c}{3d}\right)^2 + b\left(-\frac{c}{3d}\right) + a = 0$$

$$\implies -d\left(\frac{c^3}{27d^3}\right) + c\left(\frac{c^2}{9d^2}\right) - \frac{bc}{3d} + a = 0$$

$$\implies -\frac{c^3}{27d^2} + \frac{c^3}{9d^2} - \frac{bc}{3d} + a = 0$$

উভয়পক্ষকে $27d^2$ দ্বারা গুণ করে পাই:

$$-c^3 + 3c^3 - 9bcd + 27ad^2 = 0 \implies 2c^3 - 9bcd + 27ad^2 = 0$$

প্রশ্ন (Question) 46

a-এর কোন বাস্তব মানসমূহের জন্য চতুর্ঘাত সমীকরণ $x^4 - 4x^3 + ax^2 - 4x + 1 = 0$-এর চারটি মূলই বাস্তব হবে?

For what real values of a are all four roots of the quartic equation $x^4 - 4x^3 + ax^2 - 4x + 1 = 0$ real?

A) $a \in (-\infty, -10] \cup \{6\}$

B) $a \leq 6$

C) $a \geq -10$

D) $a \in [-10, 6]$

উত্তর: A) $a \in (-\infty, -10] \cup \{6\}$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত সমীকরণটি একটি প্রতিসম সমীকরণ। উভয়পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$x^2 - 4x + a - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \implies \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + a = 0$$

ধরি, $t = x + \frac{1}{x}$। যেহেতু x বাস্তব, তাই বাস্তব x এর জন্য $|t| \geq 2$ হতে হবে। সমীকরণটি রূপান্তর করে পাই:

$$(t^2 - 2) - 4t + a = 0 \implies t^2 - 4t + a - 2 = 0$$

x-এর চারটি মূলই বাস্তব হতে হলে, t-এর এই সমীকরণটির দুটি বাস্তব মূল থাকতে হবে এবং উভয় মূলেরই পরম মান 2-এর সমান বা বড় হতে হবে ($|t| \geq 2$)। সমীকরণের মূলদ্বয়:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(a-2)}}{2} = 2 \pm \sqrt{6 - a}$$

বাস্তব মূলের জন্য প্রথম শর্ত: $6 - a \geq 0 \implies a \leq 6$।

এখন মূলদ্বয়ের ওপর শর্ত $|t| \geq 2$ প্রয়োগ করি:

1. বড় মূলটি $t_2 = 2 + \sqrt{6 - a}$ সর্বদা 2-এর সমান বা বড় (যেহেতু $\sqrt{6 - a} \geq 0$)।
2. ছোট মূলটি $t_1 = 2 - \sqrt{6 - a}$ এর পরম মানও 2-এর সমান বা বড় হতে হবে:

$$2 - \sqrt{6 - a} \geq 2 \implies \sqrt{6 - a} \leq 0 \implies a = 6$$

অথবা,

$$2-\sqrt{6-a} \leq -2 \implies \sqrt{6-a} \geq 4 \implies 6-a \geq 16 \implies a \leq -10$$

সুতরাং, a-এর সম্ভাব্য বাস্তব মানসমূহ হলো: $a \in (-\infty, -10] \cup \{6\}$।

প্রশ্ন (Question) 47

যদি $x^2+x+1=0$ সমীকরণের একটি মূল x হয়, তবে $\sum_{r=1}^{30}\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)^2$ রাশিটির মান কত?

If x is a root of the equation $x^2+x+1=0$, then what is the value of the sum $\sum_{r=1}^{30}\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)^2$?

A) সমষ্টির মান 60

B) সমষ্টির মান 30

C) সমষ্টির মান 90

D) সমষ্টির মান 45

উত্তর: A) সমষ্টির মান 60

সমাধান (Solution)

সমীকরণ $x^2+x+1=0$ এর মূলদ্বয় হলো এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω এবং ω^2। ধরি, $x=\omega$। তাহলে আমাদের বের করতে হবে:

$$S=\sum_{r=1}^{30}\left(\omega^r+\omega^{-r}\right)^2$$

এখানে দুটি কেস হতে পারে:

1. **যদি r সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য হয় (অর্থাৎ $r=3k$):**

$$\omega^r+\omega^{-r}=\omega^{3k}+\omega^{-3k}=1+1=2$$

অতএব, $(\omega^r+\omega^{-r})^2=2^2=4$। 1 থেকে 30 এর মধ্যে 3 এর গুণিতক সংখ্যা হলো $\frac{30}{3}=10$ টি।

2. **যদি r সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য না হয়:**

$$\omega^r + \omega^{-r} = \omega^r + \omega^{2r} = -1 \quad (\text{যেহেতু } 1 + \omega^r + \omega^{2r} = 0)$$

অতএব, $(\omega^r + \omega^{-r})^2 = (-1)^2 = 1$। এরকম পদের সংখ্যা হলো $30 - 10 = 20$ টি।

সুতরাং মোট সমষ্টি:

$$S = (10 \times 4) + (20 \times 1) = 40 + 20 = 60$$

প্রশ্ন (Question) 48

জটিল সমতলে $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

What is the area (in square units) of the triangle formed by the roots of the equation $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ in the complex plane?

A) ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গ একক

B) ক্ষেত্রফল $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

C) ক্ষেত্রফল $6\sqrt{3}$ বর্গ একক

D) ক্ষেত্রফল $4\sqrt{3}$ বর্গ একক

উত্তর: A) ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গ একক

সমাধান (Solution)

ধরি, $w = x - 1 \implies x = w + 1$। সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$(w+1)^3 - 3(w+1)^2 + 3(w+1) + 7 = 0$$

$$\implies (w^3 + 3w^2 + 3w + 1) - 3(w^2 + 2w + 1) + (3w + 3) + 7 = 0$$

$$\implies w^3 + 8 = 0 \implies w^3 = -8$$

এই সমীকরণের মূল তিনটি হলো -8 এর তিনটি ঘনমূল। যেহেতু মূলগুলো হলো w_1, w_2, w_3, এরা জটিল সমতলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে 2 ব্যাসার্ধের বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

এখানে ব্যাসার্ধ $R = 2$, তাই ক্ষেত্রফল:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2)^2 = 3\sqrt{3}$$

যেহেতু $x = w + 1$, মূল ত্রিভুজটি কেবল জটিল সমতলে স্থানান্তরিত (translated) হয়েছে, যার ফলে এর ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকবে। সুতরাং ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গ একক।

প্রশ্ন (Question) 49

বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি চতুর্ঘাত সমীকরণ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$-এর একটি দ্বিশ্রেণির পুনরাবৃত্ত মূল (root of multiplicity 2) $1 + i$ হলে, সহগসমূহের সমষ্টি $a + b + c + d$-এর মান কত?

If $1+i$ is a repeated root of multiplicity 2 of the quartic equation with real coefficients $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, then what is the sum of the coefficients $a+b+c+d$?

A) সমষ্টির মান 0

B) সমষ্টির মান 4

C) সমষ্টির মান -4

D) সমষ্টির মান 2

উত্তর: A) সমষ্টির মান 0

সমাধান (Solution)

যেহেতু সমীকরণের সহগসমূহ বাস্তব, তাই জটিল মূলগুলো অনুবন্ধী জোড়া হিসেবে থাকবে এবং তাদের পুনরাবৃত্তির সংখ্যাও সমান হবে। যেহেতু $1 + i$ মূলটির পুনরাবৃত্তি সংখ্যা 2, তাই অপর মূল $1 - i$ এর পুনরাবৃত্তি সংখ্যাও অবশ্যই 2 হবে। অতএব, চতুর্ঘাত সমীকরণটি হবে:

$$P(x) = ((x - (1 + i))(x - (1 - i)))^2 = 0$$

$$\implies P(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$$

প্রদত্ত সমীকরণ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই:

$$a = -4, \quad b = 8, \quad c = -8, \quad d = 4$$

□□গসমূহের সমষ্টি:

$$a + b + c + d = -4 + 8 - 8 + 4 = 0$$

প্রশ্ন (Question) 50

যদি $x^5 - 1 = 0$ সমীকরণের এককের কাল্পনিক মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হয়, তবে $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$ রাশিটির মান কত?

If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the non-real roots of the equation $x^5 - 1 = 0$, then what is the value of the expression $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$?

A) রাশিটির মান 31

B) রাশিটির মান 15

C) রাশিটির মান 5

D) রাশিটির মান 33

উত্তর: A) রাশিটির মান 31

সমাধান (Solution)

আমরা জানি,

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

অতএব,

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

এই অভেদটিতে $x = 2$ বসিয়ে পাই:

$$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta) = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$$\implies 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$$

অতএব, রাশিটির মান 31।